

Aufgabenserie 7 zur Vorlesung "Mathematik für Kompass"

1. Bestimmen Sie alle Lösungen $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= -1 \\x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 2 \\4x_1 + x_2 + 6x_4 &= -3.\end{aligned}$$

Geben Sie die Lösung in vektorieller Form an.

2. Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus alle Lösungen $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ bzw. $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ des Gleichungssystems:

a)

$$\begin{aligned}x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 3 \\3x_1 + 2x_2 - 8x_3 &= -7 \\-2x_1 - x_2 + 6x_3 &= 5,\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}2x_1 + x_3 + 4x_4 &= -1 \\3x_1 - x_2 + 2x_3 + 7x_4 &= 2 \\x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= -10,\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}5x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 &= 15 \\3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 7 \\-x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 &= -3,\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 1 \\-x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= -3 \\x_1 + 2x_3 + x_4 &= 4,\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}x_1 - 5x_2 + 2x_4 &= -1 \\2x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 4x_4 &= -14 \\-x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 5.\end{aligned}$$

Geben Sie die Lösung jeweils in vektorieller Form an. Wie groß ist jeweils der Rang der Koeffizientenmatrix?

3. Ermitteln Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus den Rang der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wie groß ist der größtmögliche Rang einer 4×4 -Matrix?