

Aufgabenserie 1 zur Vorlesung "Zuverlässigkeit in der Systemverfahrenstechnik"

1. Die Lebensdauer eines elektrischen Bauteils sei exponentialverteilt. Es ist bekannt, dass die Hälfte aller Bauteile 500 (Betriebsstunden) nicht übersteht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

- a) die Lebensdauer des Bauteils mindestens 200 erreicht bzw.
- b) das Bauteil vor dem Zeitpunkt 700 ausfällt bzw.
- c) die Lebensdauer des Bauteils zwischen 50 und 1500 liegt.
- d) Ein Zeitpunkt t , bei dem die Garantiezeit beendet ist, soll so festgelegt werden, dass 95% der Geräte diesen Zeitpunkt erreichen. Wie muss t festgelegt werden?
- e) Wie groß ist t , wenn bis zum Zeitpunkt t 90% der Geräte ausgefallen sein sollen?
- f) Bei einem Bauteil ist zum Zeitpunkt 600 bekannt, dass es noch nicht ausgefallen ist. Wie groß ist die mittlere Restnutzungsdauer?

2. Wir betrachten die Lebensdauer eines Kompressors, die als Weibull-verteilt mit dem Formparameter 3 angenommen werden kann. Es ist bekannt, dass die Lebensdauer des Bauteils den Erwartungswert 1.8 besitzt (Einheit 50000 Betriebsstunden).

- a) Bestimmen Sie den Parameter τ , die charakteristische Lebensdauer.
- b) Bestimmen Sie den Median, die Varianz und die Standardabweichung. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass
- c) die Lebensdauer des Bauteils mindestens 1.2 erreicht bzw.
- d) das Bauteil vor dem Zeitpunkt 0.7 ausfällt bzw.
- e) die Lebensdauer des Bauteils zwischen 1 und 2.5 liegt.
- f) Ermitteln Sie die Ausfallrate für die Zeitpunkte 0.5 und 3. Interpretieren Sie beide Werte und vergleichen Sie dabei diese Werte.
- g) Wie groß ist der Median der Restnutzungsdauer zum Zeitpunkt $t = 0.9$?

Hinweis: $\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) = 0.89298$, $\Gamma\left(\frac{5}{3}\right) = 0.90275$

3. Die Lebensdauer einer speziellen Sorte von Elektromotoren genüge einer Weibull-Verteilung. Es ist bekannt, dass 80% der Motoren 10000 Betriebsstunden überstehen und 50% der Motoren 20000 Betriebsstunden überstehen.

- a) Bestimmen Sie die Parameter der Verteilung.
- b) Wie groß ist der Median der Lebensdauer des Motors? Geben Sie außerdem die Quantile der Ordnung 0.2 und 0.9 an.
- c) Wie viel Prozent der Motoren werden in der Garantiezeit funktionsuntüchtig, wenn angenommen wird, dass in der Garantiezeit 3000 Betriebsstunden vorliegen.
- d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Lebensdauer zwischen 10000 und 40000?

e) Wie viel Prozent der Motoren sind zum Zeitpunkt 30000 Betriebsstunden noch funktionstüchtig?

4. Eine Baugruppe habe eine Gammaverteilte Lebensdauer mit dem Erwartungswert 9 (Einheit: 10000 Betriebsstunden) und dem Formparameter 4.

a) Notieren Sie die konkrete Verteilungsfunktion. Berechnen Sie die Varianz

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Ausfall

b) zwischen den Zeitpunkten 4 und 12 bzw.

c) nach dem Zeitpunkt 10 liegt.

d) Bestimmen Sie die Ausfallrate zu den Zeitpunkten 4 und 15. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

Hinweis: Die Verteilungsfunktion berechnet sich nach der Formel

$$F(x) = 1 - e^{-x/\tau} \sum_{k=0}^{\beta-1} \frac{(x/\tau)^k}{k!}$$

5. Das Ausfallverhalten von Kugellagern kann recht gut durch eine Weibullverteilung mit dem Formparameter $\beta = 1.4$ beschrieben werden. 50% der Kugellager überstehen 6 Einheiten, eine Einheit entspricht hier Millionen Umdrehungen.

a) Bestimmen Sie den Parameter τ der Verteilung.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Lebensdauer zwischen 4 und 9 liegt.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Lebensdauer mindestens 8 beträgt.

d) Welchen Zeitpunkt t überlebt ein Kugellager mit Wahrscheinlichkeit 0.8?

e) Bestimmen Sie die Ausfallrate zu den Zeitpunkten 2 und 10. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

6. Bei einem neu entwickelten Pumpentyp kommt es verstärkt zu Frühausfällen, was sich durch eine Weibullverteilung mit Formparameter 0.8 beschreiben lässt. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.6321 tritt der Ausfall vor dem Zeitpunkt 4 (eine Einheit entspricht 10000 Betriebsstunden) ein.

a) Notieren Sie die Parameter der Verteilung.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Lebensdauer zwischen 2 und 7 liegt.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Lebensdauer höchstens 2.5 bzw. 1 beträgt.

d) Bestimmen Sie die Ausfallrate zu den Zeitpunkten 0.2 und 2. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

7. Wir betrachten die Lebensdauer (eine Einheit entspricht 10000 Betriebsstunden) eines chemischen Reaktors, die eine dreiparametrische Weibullverteilung mit dem Formparameter 2.7 besitzt. Die ausfallfreie Lebensdauer beträgt 1.5. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.5 tritt der Ausfall vor dem Zeitpunkt 4.8 ein.

- a) Geben Sie die Parameter der Verteilung und die mittlere Lebensdauer an.
- b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Lebensdauer zwischen 4 und 8 liegt.
- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Lebensdauer mindestens 3.2 beträgt.
- d) Ermitteln Sie die Ausfallrate zu den Zeitpunkten 2.2 und 5. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

Hinweis: $\Gamma\left(1 + \frac{1}{2.7}\right) = 0.88928$