5. Aufgabenblatt Algorithmische Geometrie
SS 2019

1. In dieser Aufgabe geht es um die Überwachung x-monotoner Orthopolygone mit Überwachungsgeräten, die einen Bereich von 90^o abdecken können.

   (a) Implementieren Sie eine Funktion, die bei Übergabe einer geraden natürlichen Zahl $n \geq 4$ ein zufälliges x-monotones Orthopolygon mit n Ecken erzeugt.

   (b) Implementieren Sie eine Funktion, die für ein x-monotones Orthopolygon die Anzahlen der Überwachungsgeräte berechnet, die von der NO-, SO-, SW- und NW-Regel jeweils platziert werden.

   (c) Stellen Sie den Zusammenhang zwischen der Anzahl n der Ecken des x-monotonen Orthopolygons und der mittleren Anzahl von Überwachungsgeräten, die durch die jeweils sparsamste Regel platziert werden, dar. Vergleichen Sie dies mit der oberen Schranke im worst-case, die wir in der Vorlesung hergeleitet haben.

2. In dieser Aufgabe geht es um die gleichzeitige Überwachung eines einfachen Polygons und des Bereichs außerhalb des Polygons mit Überwachungsgeräten, die einen Bereich von 90^o abdecken können.

   (a) Der Einfachheit halber betrachten wir nur treppenförmige einfache Orthopolygone: Wenn man bei der N-Kante mit maximaler y-Koordinate eines solchen Polygons beginnend im Uhrzeigersinn den Rand durchläuft dann erhält man eine Folge von Himmelsrichtungen der Kanten, die wie folgt aussieht:

   $$N, O, N, O, N, O, N, O, \dots, N, O, S, W, S, W, S, W, \dots, S, W$$

   Implementieren Sie eine Funktion, die bei Übergabe einer geraden natürlichen Zahl $n \geq 4$ ein zufälliges treppenförmiges Orthopolygon mit n Ecken erzeugt.

   (b) Implementieren Sie eine Funktion, die für ein treppenfömiges Orthopolygon die Anzahl der Überwachungsgeräte berechnet, die mit folgender Regel R_1 platziert werden:

      (i) In jede SW-Ecke kommt ein Überwachungsgerät, die zusammen das Innere des Polygons überwachen sollen.

      (ii) An den oberen Endpunkt jeder W-Kante und an den unteren Endpunkt jeder O-Kante kommt ein Überwachungsgerät, die zusammen (fast) das ganze Äußere des Polygons überwachen sollen.

      (iii) Ein weiteres Überwachungsgerät für das Äußere des Polygons kommt auf die N-Kante mit maximaler y-Koordinate und noch eins auf die S-Kante mit minimaler y-Koordinate.

   (c) Versuchen Sie eine zur Regel R_1 analoge Regel R_2 zu beschreiben und argumentieren Sie, dass für jedes treppenförmige Orthopolygon immer mindestens eine der beiden Regeln höchstens $\frac{3}{4}n + 2$ Überwachungsgeräte verwendet. Kann man immer erreichen, dass auf jeder Ecke höchstens ein Überwachungsgerät platziert wird?