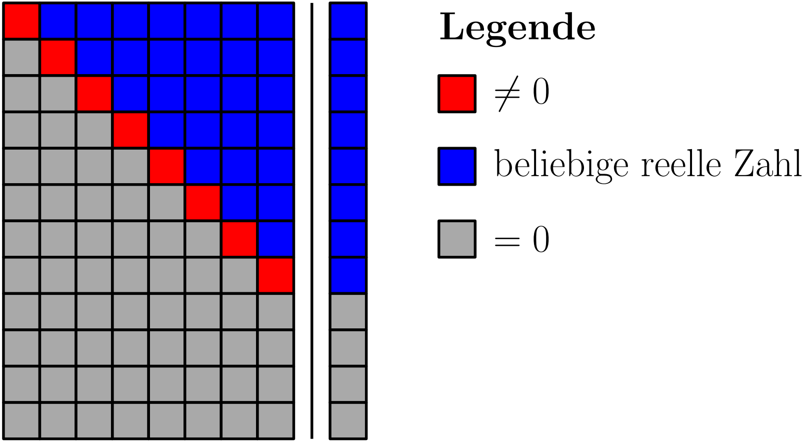
Beispiel für Gauß-Algorithmus

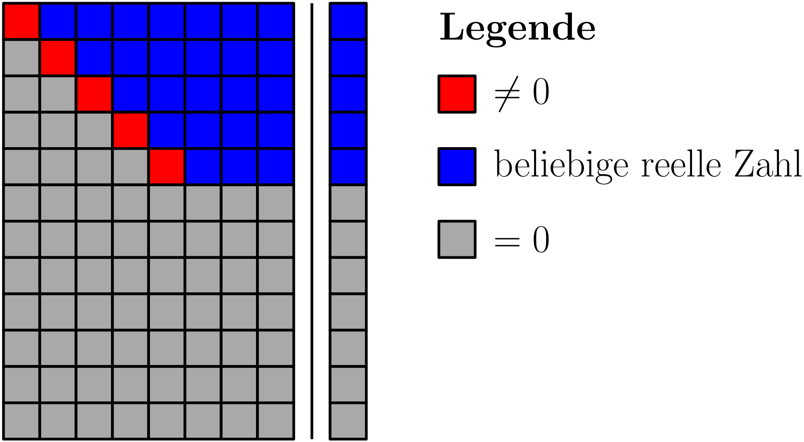
Andreas Spillner

Grundlagen der Mathematik
WS 2019/2020

Schematische Darstellung einer erweiterten Koeffizientenmatrix in durchgehender Stufenform



Schematische Darstellung einer erweiterten Koeffizientenmatrix in abbrechender Stufenform



Es fehlen $k = 3$ Stufen.

Systematische Umformung eines LGS am Beispiel (1)

Das LGS habe folgende erweiterte Koeffizientenmatrix:

x_1	x_2	x_3	x_4	R
0	0	-1	2	-6
1	1	-2	0	5
3	3	-9	6	-3
-2	-2	4	-4	6

Systematische Umformung eines LGS am Beispiel (2)

Wir brauchen einen Eintrag ungleich 0 in der linken oberen Ecke. Daher tauschen die ersten beiden Zeilen die Plätze:

x_1	x_2	x_3	x_4	R
0	0	-1	2	-6
1	1	-2	0	5
3	3	-9	6	-3
-2	-2	4	-4	6

$\longrightarrow$

x_1	x_2	x_3	x_4	R
1	1	-2	0	5
0	0	-1	2	-6
3	3	-9	6	-3
-2	-2	4	-4	6

Systematische Umformung eines LGS am Beispiel (3)

Als Nächstes wollen wir erreichen, dass alle Einträge in der ersten Spalte, bis auf den in der ersten Zeile natürlich, gleich 0 sind. Wir addieren hierfür zuerst die mit -3 multiplizierte erste Zeile zur dritten Zeile:

$$
\begin{array}{rrrr|r}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & R \\
\hline
1 & 1 & -2 & 0 & 5 \\
0 & 0 & -1 & 2 & -6 \\
3 & 3 & -9 & 6 & -3 \\
-2 & -2 & 4 & -4 & 6
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{rrrr|r}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & R \\
\hline
1 & 1 & -2 & 0 & 5 \\
0 & 0 & -1 & 2 & -6 \\
0 & 0 & -3 & 6 & -18 \\
-2 & -2 & 4 & -4 & 6
\end{array}
$$

Systematische Umformung eines LGS am Beispiel (4)

Danach addieren wir noch die mit 2 multiplizierte erste Zeile zur vierten Zeile:

$$
\begin{array}{rrrr|r}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & R \\
\hline
1 & 1 & -2 & 0 & 5 \\
0 & 0 & -1 & 2 & -6 \\
0 & 0 & -3 & 6 & -18 \\
-2 & -2 & 4 & -4 & 6
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{rrrr|r}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & R \\
\hline
1 & 1 & -2 & 0 & 5 \\
0 & 0 & -1 & 2 & -6 \\
0 & 0 & -3 & 6 & -18 \\
0 & 0 & 0 & -4 & 16
\end{array}
$$

Damit ist die erste Spalte fertig. Die erste Spalte und die erste Zeile stehen ab jetzt für die Operationen (i)-(iv) nicht mehr zur Verfügung.

Systematische Umformung eines LGS am Beispiel (5)

Nun brauchen wir in der zweiten Zeile in der zweiten Spalte wieder einen Eintrag ungleich 0. Mit einem Tausch von zwei Zeilen kann dies offensichtlich nicht erreicht werden (Achtung: erste Zeile steht nicht mehr zur Verfügung!).
Es ist aber möglich, dies mit einem Spaltentausch zu erreichen.
Wir lassen die zweite und die dritte Spalte ihre Plätze tauschen:

$$\begin{array}{rrrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & R \\ \hline 1 & 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 16 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rrrr|r} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & R \\ \hline 1 & -2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & -3 & 0 & 6 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 16 \end{array}$$

Systematische Umformung eines LGS am Beispiel (6)

Als Nächstes wollen wir erreichen, dass die Einträge in der dritten und vierten Zeile der zweiten Spalte gleich 0 sind. Da der Eintrag in der vierten Zeile der zweiten Spalte schon gleich 0 ist, brauchen wir hierfür nur die mit -3 multiplizierte zweite Zeile zur dritten Zeile addieren:

$$
\begin{array}{rrrr|r}
x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & R \\
\hline
1 & -2 & 1 & 0 & 5 \\
0 & -1 & 0 & 2 & -6 \\
0 & -3 & 0 & 6 & -18 \\
0 & 0 & 0 & -4 & 16
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{rrrr|r}
x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & R \\
\hline
1 & -2 & 1 & 0 & 5 \\
0 & -1 & 0 & 2 & -6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -4 & 16
\end{array}
$$

Damit ist nun auch die zweite Spalte fertig. Ab jetzt stehen auch die zweite Spalte und die zweite Zeile für die Operationen (i)-(iv) nicht mehr zur Verfügung.

Systematische Umformung eines LGS am Beispiel (7)

Da die erweiterte Koeffizientenmatrix noch immer keine Form hat, an der wir die Lösungsmenge ablesen können, müssen wir sie weiter umformen.
Wir benötigen nun einen Eintrag ungleich 0 in der dritten Zeile in der dritten Spalte. Da dies mit einem Zeilentausch nicht erreicht werden kann, lassen wir die dritte und die vierte Spalte ihre Plätze tauschen:

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & R \\ \hline 1 & -2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 16 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_3 & x_4 & x_2 & R \\ \hline 1 & -2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 16 \end{array}$$

Systematische Umformung eines LGS am Beispiel (8)

Schließlich lassen wir noch die dritte und die vierte Zeile ihre Plätze tauschen, um in der dritten Zeile in der dritten Spalte einen Eintrag ungleich 0 zu erhalten:

$$
\begin{array}{cccc|c}
x_1 & x_3 & x_4 & x_2 & R \\
\hline
1 & -2 & 0 & 1 & 5 \\
0 & -1 & 2 & 0 & -6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -4 & 0 & 16
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{cccc|c}
x_1 & x_3 & x_4 & x_2 & R \\
\hline
1 & -2 & 0 & 1 & 5 \\
0 & -1 & 2 & 0 & -6 \\
0 & 0 & -4 & 0 & 16 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Damit sind wir am Ziel unserer Umformungen angelangt: Die erweiterte Koeffizientenmatrix hat eine abbrechende Stufenform ohne offensichtlich nicht erfüllbare Zeilen. Es fehlt $k = 1$ Stufe.

Bestimmung der Lösungsmenge des LGS

- Gemäß unseren Vorüberlegungen hat das lineare Gleichungssystem eine unendliche Lösungsmenge L, welche durch $k = 1$ reellen Parameter beschrieben werden kann.
- Man erhält:

$$\begin{aligned} L = \{ & (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \\ & \quad \text{es existiert ein } t \in \mathbb{R} \text{ mit} \\ & \quad\quad (x_1 = 1 - t \wedge x_2 = t \wedge x_3 = -2 \wedge x_4 = -4) \} \end{aligned}$$